TITLE:

擬凸領域の境界上の局所コホモロジーの双対性定理 (Analytic Variety上の諸問題)

AUTHOR(S):

郡, 敏昭

CITATION:

郡, 敏昭. 擬凸領域の境界上の局所コホモロジーの双対性定理 (Analytic Variety上の諸問題). 数理解析研究所講究録 1980, 387: 99-113

ISSUE DATE:

1980-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/104896

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅 Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
387巻 1980年 99-113

擬凸領域の境界上の局所コホモロジーの双対性定理

早大 理工　郡 敏昭

D を $n\ (\geq 2)$ 次元解析空間 X の中の相対コンパクトな開集合で，その境界 $B=\partial D$ は余次元 1 の部分多様体とする．すなわち B の近傍は X の regular な点ばかりからなっているとする．さらに B は強擬凸な境界であると仮定する．あるいは D が強擬凸な開集合であると言ってもよい。Ω^p, $1\leq p\leq n$, で X 上の正則微分形式をあらわす．次の諸結果が示された．

$\mathcal{F}$ を X 上の連接層とするとき，

$$(0.1)\qquad \dim_{\mathbb{C}} H^q(B,\ \mathcal{H}^1_B\mathcal{F}) < \infty,\quad \text{for } 0<q<\operatorname{prof}\mathcal{F}-1.$$

$$(0.2)\qquad (H^q(B,\ \mathcal{H}^1_B\mathcal{F}))' \cong \operatorname{Ext}^{n-q-1}(B;\ \mathcal{H}^1_B\mathcal{F},\ \mathcal{H}^1_B\Omega^n)\quad \text{for } q<\operatorname{prof}\mathcal{F}-1.$$

ここに アクセント $'$ は位相的双対 をあらわし，また

$\underline{H}^1_B\mathcal{F}$ は B に台をもつ1次の局所コホモロジーの層である。

Serre - Malgrange duality theorem は次のように述べられる。V を次元 n の複素解析多様体，$\mathcal{F}$ をその上の連接層とする。このとき $H^p(V, \mathcal{F})$ に Frechet - Schwartz 空間の位相の商位相を，$Ext_c^{n-p}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)$ に Dual of Frechet - Schwartz 位相の商位相を導入し これらに associate した　　　．ハウスドルフ空間について

$$(H^p(V, \mathcal{F})_{sep})' \cong Ext_c^{n-p}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)_{sep}$$

が成り立つようにできる。同じく $H_c^q(V, \mathcal{F})$ 上に QDFS 空間の位相を，$Ext^{n-q}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)$ 上に QFS 空間の位相を導入し

$$(H_c^q(V, \mathcal{F})_{sep})' \cong Ext^{n-q}(V; \mathcal{F}, \Omega^n)$$

を成り立たせることができる。

さて上の D が多様体となっているとき，アンドレオッチ＝グラウエルの結果より

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(D, \mathcal{F}) < \infty, \quad q > 0,$$

$$\dim_{\mathbb{C}} H_c^q(D, \mathcal{F}) < \infty, \quad q < \mathrm{prof}\,\mathcal{F},$$

を知っているから，これらコホモロジーの空間は当然ハウスドルフであり，したがって

$$(0.3)\qquad H^{q}(D,\mathcal{F})' \cong \mathrm{Ext}_{c}^{n-q}(D,\mathcal{F},\Omega^{n}),$$

$$(0.4)\qquad H_{c}^{q}(D,\mathcal{F})' \cong \mathrm{Ext}^{n-q}(D;\mathcal{F},\Omega^{n}),$$
$$(q < \mathrm{prof}\,\mathcal{F})$$

が成立する。

(0.2) (0.3) (0.4) の3つの双対性は次のような関係にある：列

$$\cdots \to H^{q-1}(B,\mathcal{H}_{B}^{1}\mathcal{F}) \to H_{c}^{q}(D,\mathcal{F}) \to H^{q}(D,\mathcal{F}) \to H^{q}(B,\mathcal{H}_{B}^{1}\mathcal{F}) \to \cdots$$

は完全であり，その双対

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-q}(B;\mathcal{H}_{B}^{1}\mathcal{F},\mathcal{H}_{B}^{1}\Omega^{n}) \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-q}(D;\mathcal{F},\Omega^{n}) \leftarrow$$
$$\mathrm{Ext}_{c}^{n-q}(D;\mathcal{F},\Omega^{n}) \leftarrow \mathrm{Ext}^{n-q-1}(B,\mathcal{H}_{B}^{1}\mathcal{F},\mathcal{H}_{B}^{1}\Omega^{n}) \leftarrow$$

も完全となる。

この論文では概略を記す。詳しくは文献[2]を見ていただきたい。

§1, $\mathrm{Ext}^{\cdot}$ 函手

$(X,\mathcal{A})$ を環付空間，Z を X の局所閉集合．

$j:(Z,\mathcal{B}=\mathcal{A}|Z) \hookrightarrow (X,\mathcal{A})$ を inclusion とする．

(1.1.) finite presentation $\mathcal{A}$-加群 $\mathcal{F}$ に対し，

$$j_{*}j^{*}(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{F},\mathcal{H})) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(j_{*}j^{*}\mathcal{F},j_{*}j^{*}\mathcal{H})$$

が，任意の $\mathcal{A}$-加群 $\mathcal{H}$ につき成立つ。

Z を開集合とする。閉集合 U に対し，U 内の開集合で

$U\cap Z$ に含まれるようなものの全体を $\Phi_U(U\cap Z)$ と書く。

$G\in Ab(Z)$ に対し $j_!G\in Ab(X)$ を

$$\Gamma(U,\ j_!G)=\Gamma_{\Phi_U(U\cap Z)}(U\cap Z,\ G)$$

で定義する。

$\mathcal{F}\in Ab(X)$ に対し

$$R^p j_!(\mathcal{F}|Z)=0 \quad ,\ p>0,$$

$$H^p(X,\ j_!(\mathcal{F}|Z))\cong H^p_{\Phi_X(Z)}(Z,\ \mathcal{F}|Z)$$

が成り立つ。

X paracompact としよう。D 開 $\Subset X$,
$B=\partial D$ とする。

$$i:\ B\hookrightarrow X,\qquad j:\ D\hookrightarrow X$$

を inclusions とする。このとき $\mathcal{F}\in Ab(X)$ に対し列

$$0\to j_!(\mathcal{F}|D)\to j_*(\mathcal{F}|D)\to i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B)\to 0$$

は完全である。

補題 1.2. $\mathcal{F}$ finite presentation A－加群，
$\mathcal{G}$: A－加群で $\mathcal{G}|D$ が j_*－acyclic すなわち $R^p j_*(\mathcal{G}|D)=0$，$p>0$，とする。このとき次の列は完全：

$$\cdots\cdots \to \mathrm{Ext}^p_{\Phi_X(D)}(D;\ \mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^p(D;\ \mathcal{F}, \mathcal{G})$$
$$\to \mathrm{Ext}^p(B;\ j_*(\mathcal{F}|D),\ j_*(\mathcal{G}|D)) \to \mathrm{Ext}^{p+1}_{\Phi_X(D)}(D;\ \mathcal{F}, \mathcal{G})$$
$$\to \cdots .$$

補題 1.3. $\mathcal{F}$ を finite presentation A - 加群, $\mathcal{G}$ を A - 加群で $(\mathcal{G}|D)$ が j_* - acyclic とする. また $\mathcal{U}$ を B の近傍の開被覆とする.

このとき

$$\mathrm{Ext}^{\cdot}(B;\ j_*(\mathcal{F}|D),\ j_*(\mathcal{G}|D))$$

を aboutissement とするスペクトル列で, その第 1 項が

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U} \cap B,\ ext^q_A(j_*(\mathcal{F}|D), j_*(\mathcal{G}|D)))$$

で与えられるものが存在する. ここに $ext^q_A(\mathcal{M}, \mathcal{L})$ は

$$V \longmapsto \mathrm{Ext}^q_A(V;\ \mathcal{M}, \mathcal{L})$$

で定義される presheaf (system of coefficients) である.

§2. 擬凸領域の境界上 および その内部, 外部におけるコホモロジー.

$(X, \mathcal{O})$ を reduced, $\dim X \geq 2$, なる解析空間. D を相対コンパクト強擬凸開集合, $B = \partial D$ とする.

$$i : B \hookrightarrow X, \quad j \hookrightarrow X \quad \text{inclusion}$$

とする. Andreotti — Grauert の結果を書きなおすと次のように述べられる. $\mathcal{F} \in coh(X)$ に対し

$$(2.1)\quad \begin{cases} R^p j_*(\mathcal{F}|D) = 0, & p > 0, \\ \underline{H}^p_B \mathcal{F} = 0 & p = 0,\ 1 < p < \mathrm{prof}\,\mathcal{F}, \\ & \dim \mathcal{F} < p \\ \underline{H}^1_B \mathcal{F} = i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B). \end{cases}$$

ここに $\Gamma_B \mathcal{F}$ を $\Gamma(U, \Gamma_B \mathcal{F}) = \Gamma_{U \cap B}(U, \mathcal{F}|U)$ で定義される層とすると Γ_B は函手 $: Ab(X) \to Ab(X)$ だが, その p 次導来函手 $R^p \Gamma_B$ を $\underline{H}^p_B$ と書いている.

補題 1.2 より $\mathcal{G}, \mathcal{F} \in coh(X)$ に対し

$$\cdots \to Ext^p_{\Phi_X(D)}(D; \mathcal{F}, \mathcal{G}) \to Ext^p(D; \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

$$\to Ext^p(B; \underline{H}^1_B \mathcal{F}, \underline{H}^1_B \mathcal{G}) \to Ext^{p+1}_{\Phi_X(D)}(D, \mathcal{F}, \mathcal{G})$$

が完全列となる.

補題 1.3 より $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in coh(X)$ に対し,

次のスペクトル列がある。

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}\cap B,\ ext_{\mathcal{O}}^q(\underline{H}_B^1\mathcal{F},\ \underline{H}_B^1\mathcal{G})) \Rightarrow Ext^{\cdot}(B;\underline{H}_B^1\mathcal{F},\underline{H}_B^1\mathcal{G})。$$

とくに $\mathcal{F}\in coh(X)$ に対し

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \mathcal{H}^q(\underline{H}_B^1\mathcal{F})) \Rightarrow H^{\cdot}(B,\ \underline{H}_B^1\mathcal{F})$$

なるスペクトル列がある。ここに $\mathcal{H}^q(\mathcal{M})$ は

$$V \longmapsto H^q(V,\mathcal{M})$$

なる presheaf。

exact 列 $0\to j_!(\mathcal{F}|D)\to j_*(\mathcal{F}|D)\to i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B)\to 0$

$$i_*(j_*(\mathcal{F}|D)|B) \cong \underline{H}_B^1\mathcal{F}$$

より presheaf の exact 列

$$\to \mathcal{H}^{q-1}(\underline{H}_B^1\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^q_{\Phi}(\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^q(j_*\mathcal{F}) \to \mathcal{H}^q(\underline{H}_B^1\mathcal{F}) \to$$

が得られる。

以下 $\mathcal{U}$ を B の近傍 N の開被覆で

- $U_\lambda \cap B \neq \phi \quad \forall U_\lambda \in \mathcal{U}$
- $H^q(U_\lambda\cap D,\ \mathcal{F}) = 0 \quad q\geqq 1,\ \ \mathcal{F}\in coh(X)$
- $H^q_{\Phi}(U_\lambda\cap D,\ \mathcal{F}) = 0,\ \ q < \mathrm{prof}\,\mathcal{F},\ q > \dim\mathcal{F}$
  $\mathcal{F}\in coh(X)$

を満足するものとする。

$R^p j_*(\mathcal{F}|D) = 0 \quad p\geqq 1,\ \mathcal{F}\in coh(X)$ だったから

$\mathcal{H}^q(j_*\mathcal{F}) = 0 \quad q\geqq 1$ on the nerf of $\mathcal{U}$。

したがって 上の exact 列より、$\mathcal{F}$ が Cohen-Macaulay sheaf のとき

$$\mathcal{H}^q(\underline{H}^1_B\mathcal{F}) = 0 \qquad q \neq 0,\ q \neq \mathrm{prof}\,\mathcal{F} - 1$$

$$\mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathcal{F}) \cong \mathcal{H}^m_{\Phi}(\mathcal{F}) \qquad 但\ m = \mathrm{prof}\,\mathcal{F}.$$

が $\mathcal{U}$ の nerf に対して成り立つ。

上のスペクトル列とあわせて考え 次の結論を得る。

命題2.2. $\mathcal{U}$ を上の被覆, $\mathcal{F}$ Cohen-Macaulay 層. に対し次が成り立つ:

(1) $$H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \mathcal{H}^q(\underline{H}^1_B\mathcal{F})) = 0 \qquad q \neq 0,\ q \neq m-1$$

$$H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \underline{H}^1_B\mathcal{F}) = 0 \qquad p \geqq m$$

$$H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathcal{F})) = 0 \qquad p \geqq 1$$

但 $m = \mathrm{prof}\,\mathcal{F}$

(2) $$H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \underline{H}^1_B\mathcal{F}) \cong H^p(B,\ \underline{H}^1_B\mathcal{F})$$

for $p \leqq \mathrm{prof}\,\mathcal{F} - 2$

(3) $$0 \to H^{m-1}(\mathcal{U}\cap B, \underline{H}^1_B\mathcal{F}) \to H^{m-1}(B, \underline{H}^1_B\mathcal{F}) \to$$

$$\to H^0(\mathcal{U}\cap B,\ \mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathcal{F})) \to 0$$

は exact.

(Cartan-Eilenberg: Homological Algebra XV, 5.5 etc)

さらに次が成り立つ

(2.3). $H^p(\mathfrak{U}\cap B, \underline{H}^1_B\mathcal{F}) \cong H^p(\mathfrak{U}\cap D, \mathcal{F})$

$$\cong H^p(N\cap D, \mathcal{F})$$

$$\text{for } p \le m-2.$$

$$(\because\ \Gamma(V\cap B, \underline{H}^1_B\mathcal{F}) \cong \Gamma(V\cap D, \mathcal{F}),\ V\in \mathfrak{U}\text{の}_{\text{nerf}})$$

(2.4)

$$H^0(\mathfrak{U}\cap B, \mathcal{H}^{m-1}(\underline{H}^1_B\mathcal{F})) \cong H^0(\mathfrak{U}\cap D, \mathcal{H}^m_\Phi(\mathcal{F}))$$

$$\cong H^m_\Phi(N\cap D, \mathcal{F})$$

(2.5) $H^p_\Phi(N\cap D, \mathcal{F}) = 0 \qquad p \neq m.$

Traces

補題　$\mathfrak{U}$ を上記の被覆とする.

(1) presheaf の列

$$0\to\mathcal{H}^0(C)\to\mathcal{H}^0(\underline{H}^1_B\Omega^0)\to\cdots\to\mathcal{H}^0(\underline{H}^1_B\Omega^{n-1})$$

$$\to\mathcal{H}^0(\underline{H}^1_B\Omega^n)\to 0$$

は $\mathfrak{U}$ の nerf 上で exact となる.

(2) presheaf の列

$$0\to\mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^0)\to\mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^1)\to\cdots\to\mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^n)\to 0$$

は $\mathfrak{U}$ の nerf 上で exact である.

この補題より 次の exact 列の可換図が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^1_B\Omega^{n-1}) & \to & H^{n-1}(B, \underline{H}^1_B\Omega^{n-1}) & \to & H^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^{n-1})) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^1_B\Omega^{n}) & \to & H^{n-1}(B, \underline{H}^1_B\Omega^{n}) & \to & H^0(\mathcal{U}, \mathcal{H}^{n-1}(\underline{H}^1_B\Omega^{n})) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) & = & H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& 0 & & 0 & & &
\end{array}$$

Trace を, $T^0 : H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^1_B\Omega^n) \longrightarrow H^{2n-1}(B, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$

で定義し, 命題 2.2.(1) と上の可換図の右端に注意して,

$$T^p : H^{n-1-p}(\mathcal{U}, \mathcal{H}^p(\underline{H}^1_B\Omega^n)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を零写像として延長しておく. これは退化したスペクトル列の morphisme

$$T^\bullet : H^{n-1-\bullet}(\mathcal{U}, \mathcal{H}^\bullet(\underline{H}^1_B\Omega^n)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

と考えられ その aboutement の trace

$$T : H^\bullet(B, \underline{H}^1_B\Omega^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

を induce する.

(2.4) $H^{n-1}(\mathcal{U}, \underline{H}^1_B\Omega^n) \cong H^{n-1}(N \cap D, \Omega^n)$ に注意すれば T^0 は

$$[\varphi] \longmapsto \int_{(\rho=-\varepsilon)} \varphi \in H^{2n-1}(B_\varepsilon, \mathbb{C}) \cong H^{2n-1}(B, \mathbb{C})$$

で与えられる。ただし $\varphi \in \Gamma(N \cap D, \mathcal{E}^{n,n-1})$, $\bar\partial\varphi = 0$

は、$[\varphi] \in H^{n-1}(N \cap D, \Omega^n)$ の代表である。

§3 有限性と双対性

$\mathfrak{U}$ を §2 で述べた covering of a nbd of B.

$$\Gamma(U_{i_0 \cdots i_p} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F}) \cong \Gamma(U_{i_0 \cdots i_p} \cap D, \mathcal{F}),$$

$$\mathcal{F} \in coh(X),$$

により右辺の FS 空間の構造を左辺に入れる。こうして

$$C^p(\mathfrak{U} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F}), \quad \mathcal{F} \in coh(X),$$

$$\hat{C}^p(\mathfrak{U} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F}) \quad (\text{交代コチェイン})$$

$$\hat{Z}^p(\mathfrak{U} \cap B, \underline{H}^1_B \mathcal{F}) \quad (\text{交代サイクル})$$

にも FS-空間の構造が入る。

補題 $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \mathcal{F} \in coh(X)$, $\forall p > 0$,

$$H^p(A_\varepsilon, \mathcal{F}) \to H^p(D \cap N, \mathcal{F}) \quad \text{surjective}$$

但 $A_\varepsilon = \{x \in N ;\ \rho(x) < \varepsilon\}$

これは Andreotti - Grauert と同様に示せる。

定理. $\mathcal{F} \in coh(X)$。このとき

$$\dim H^p(B, \underline{H}^1_B \mathcal{F}) < \infty$$

$$0 < p < \operatorname{codh} \mathcal{F} - 1 。$$

証明

§2 に述べた covering $\mathfrak{U}$ をとり

$$\dim H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}) < \infty \quad ,\ \forall p>0,$$

を示す。 $p < \operatorname{codh}\mathcal{F} - 1$ に対しては

$$H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}) \cong H^p(B,\ \mathcal{H}^1_B \mathcal{F})$$

がわかっているからである。

上の補題の A_ε をとる。A_ε の有限スタイン被覆 $\mathcal{V} = (V_j)_{1\le j\le \ell}$ をとり、$D\cap N$ の被覆 $\{V_j\cap D\}_{1\le j\le \ell}$ の refinement $\mathcal{U} = (U_i)$ をとり、それにともなう細分写像を $U_i \Subset V_{\tau(i)}$ とする。すると

$$\tau^*:\ \hat{C}^p(\mathcal{V},\mathcal{F}) \longrightarrow \hat{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

はコンパクト写像となる。上記補題より

$$(\tau^*,\delta):\ \hat{Z}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})\oplus \hat{C}^{p-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow \hat{Z}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

が onto。あとは Schwartz の lemma による例の方法で

$$\dim H^p(\mathcal{U}\cap D,\ \mathcal{F}) < \infty \quad ,\ p>0$$

故に $\quad \dim H^p(\mathcal{U}\cap B,\ \mathcal{H}^1_B \mathcal{F}) < \infty,\ p>0.$

次に双対性定理を述べよう。

$$\gamma^q:\ H^q(N\cap D,\ \Omega^p) \longrightarrow H^{q+1}_c(N\cap D,\ \Omega^p)$$

を次のように定義する。

$\varphi \in \Gamma(N\cap D,\ \mathcal{E}^{p,q})$, $\bar\partial\varphi = 0$ とする。

P

函数 $u \in C^\infty$ を，$c_0 < d' < d < 0$ に対し

$$u(x) = \begin{cases} 1 & d < \rho(x) < 0 \\ 0 & \rho(x) < d' \end{cases}$$

と定義する．但 $\{c_0 < \rho < 0\} = N \cap D$ だった．

$$\bar\partial(u\varphi) = f \in \mathcal{D}_c(N \cap D, \mathcal{E}^{p, q+1})$$

が $[f] \in H_c^{q+1}(N \cap D, \Omega^p)$ を定めるが，これを $\gamma^q[\varphi] = [f]$ とする．well defined である．

次の命題が鍵となる．

命題

$$\gamma^q : H^q(N \cap D, \Omega^p) \longrightarrow H_c^{q+1}(N \cap D, \Omega^p)$$

は $1 \leqq q \leqq n-2$ で bijectif．

証明のための準備が長いので略す．［2］

我々は有限性定理の証明より

$$\dim H^q(N \cap D, \mathcal{F}) = \dim H^q(U \cap D, \mathcal{F}) < \infty$$

$q > 0$，を得るので，

《Serre duality》が成立つ：$q > 0$ に対し

$$(H^q(N \cap D, \Omega^p))' \cong H_c^{n-q}(N \cap D, \Omega^{n-p})。$$

上記命題とあわせ，

$$(H^q(N\cap D, \Omega^p))' \cong H^{n-q-1}(N\cap D, \Omega^{n-p})$$
$$q>0$$

これより

定理　$0<q<n-1$ に対し

$$(H^q(B, \mathcal{H}^1_B\Omega^p))' \cong H^{n-q-1}(B, \mathcal{H}^1_B\Omega^{n-p})。$$

系　$2\leqq q \leqq n-2$ に対し

$$(H^q_B(X, \Omega^p))' \cong H^{n-q}_B(X, \Omega^{n-p})$$

$\Gamma(B, \mathcal{H}^1_B\Omega^p) \cong H^1_B(X, \Omega^p)$ の双対については特別の考察を要するが，最終的に次が示される．

定理　$\mathcal{F}\in coh(X)$，$q\leqq \mathrm{prof}\,\mathcal{F}-2$ に対し

$$H^q(B, \mathcal{H}^1_B\mathcal{F})' \cong \mathrm{Ext}^{n-q-1}(B; \mathcal{H}^1_B\mathcal{F}, \mathcal{H}^1_B\Omega^n).$$

Open problem:　$H^{n-1}(B, \mathcal{H}^1_B\mathcal{F})$ は一般に無限次元だが separated DFS となることが示せるのではないか（DFS はすでにわかっている）。すると

$$H^{n-1}(B, \mathcal{H}^1_B\mathcal{F})' \cong \mathrm{Hom}(B\,;\, \mathcal{H}^1_B\mathcal{F},\, \mathcal{H}^1_B\Omega^n)$$

が成り立つか？

文献

[1] 郡 敏昭: Cohomologie de De Rham au bord d'un domaine fortement pseudoconvexe
Tokyo J. Math. Vol 3 No1 pp37 – 74

[2] ——— : Théorème de dualité pour la cohomologie locale au bord des ouverts fortement pseudoconvexes, Hokkaido Math. J. 投稿予定

[3] Andreotti – Grauert : Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962)